Algebraična Morsova Teorija

Leon Lampret

12. december 2012

V tem povzetku na kratko predstavimo glavni rezultat Sköldbergove algebraične Morsove teorije, ki je analog Formanove diskretne Morsove teorije. Diskretna Morsova teorija simplicialnemu kompleksu priredi, glede na neko Morsovo funkcijo na njem, nov simplicialni kompleks, z manj celicami a istim homotopskim tipom. Namesto Morsove funkcije je ekvivalentno podati v Hassejevem diagramu kompleksa (katerega vozlišča so simpleksi, povezave so inkluzije $(n-1)$-lic v n-simplekse) neko podmnožico povezav $\mathcal{M}$, ki je aciklično prirejanje (tj. nobeni povezavi iz $\mathcal{M}$ nimata skupnega krajišča; če vsem povezavam v $\mathcal{M}$ obrnemo smer, dobljeni graf ne bo vseboval usmerjenih ciklov). Poleg tega diskretna Morsova teorija vsakemu simplicialnemu kompleksu priredi verižni kompleks $\mathbb{Z}$-modulov, katerega homologija je enaka simplicialni homologiji prostora. Ko računamo homologijo kakih bolj splošnih objektov, npr. Liejevih algeber, si želimo imeti orodje, ki prav tako zmanjša verižni kompleks, brez da bi spremenilo njegovo homologijo. Na predavanjih bomo izpeljali glavni strukturni izrek in si ogledali tri zglede uporabe.

Priprava: Naj bo R poljuben kolobar z enico. *Verižni kompleks* (A_*, ∂_*) je družina (levih ali desnih) R-modulov in homomorfizmov

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots,$$

tako da velja $\forall n \in \mathbb{Z}\colon \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, oz. $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\partial_n$. Tedaj je n-ta homologija od A_* enaka $H_n(A_*) = \frac{\mathrm{Ker}\,\partial_n}{\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}}$. Na verižni kompleks lahko gledamo tudi kot na $\mathbb{Z}$-stopničen modul, tj. $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, skupaj s stopničenim homomorfizmom $\partial\colon A \to A$ stopnje -1, tj. $\partial(A_n) \subseteq A_{n-1}$, za katerega velja $\partial \circ \partial = 0$. Zgled: Če je X simplicialni kompleks, je $\mathbb{Z}^{(X^{[*]})} := \bigoplus_{\sigma \in X^{[*]}} \mathbb{Z}$ verižni kompleks, kjer $X^{[n]}$ označuje množico vseh n-simpleksov, in je robni homomorfizem na simpleksu $\sigma = \mathrm{conv}(x_0, \ldots, x_n)$ podan s predpisom $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{conv}(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$, oznaka $\widehat{x_i}$ pa pomeni, da je točka izpuščena iz seznama konveksne ogrinjače.

Naj bosta A_* in B_* verižna kompleksa. *Verižni homomorfizem* je družina homomorfizmov $f_n\colon A_n \to B_n$, tako da velja $\forall n \in \mathbb{Z}\colon f_{n-1} \circ \partial_n^A = \partial_n^B \circ f_n$ $(\star)$, t.j. da spodnji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial^A_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "\partial^A_n"] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial^B_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "\partial^B_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Na verižni homomorfizem lahko gledamo tudi kot na homomorfizem $\mathbb{Z}$-stopničenih modulov $f\colon A \to B$ stopnje 0, tj. $f(A_n) \subseteq B_n$, ki komutira z robnima homomorfizmoma, tj. $f \circ \partial^A = \partial^B \circ f$. Pogoj $(\star)$ implicira inkluziji $f_n(\mathrm{Ker}\partial_n^A) \subseteq \mathrm{Ker}\partial_n^B$ in $f_n(\mathrm{Im}\partial_n^A) \subseteq \mathrm{Im}\partial_n^B$. Res: če je $x \in A$ in $\partial(x) = 0$, potem $\partial(f(x)) = f(\partial(x)) = f(0) = 0$; če je $x \in A$ in $x = \partial(x')$, potem $f(x) = f(\partial(x')) = \partial(f(x'))$. Sklepamo: vsak verižni homomorfizem $f_*\colon A_* \to B_*$ inducira dobro definiran homomorfizem $H_n f\colon\ H_n(A_*) \longrightarrow H_n(B_*),\ x + \mathrm{Im}\partial_{n+1}^A \longmapsto f_n(x) + \mathrm{Im}\partial_{n+1}^B$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Zgled: Vsaka kosoma linearna preslikava $f\colon X \to Y$ med simplicialnimi kompleksi (t.j. taka, da za vsak simpleks σ iz X obstaja simpleks σ' iz Y, tako da je $f|_\sigma\colon \sigma \to f(\sigma) = \sigma'$ linearna preslikava) inducira verižno preslikavo $f_*\colon \mathbb{Z}^{(X^{[*]})} \to \mathbb{Z}^{(Y^{[*]})}$, ki je na bazi podana z $f_*(\sigma) := f(\sigma)$.

Podkompleks verižnega kompleksa A_* je družina podmodulov $S_n \leq A_n$, tako da velja $\forall n \in \mathbb{Z}\colon \partial_n(S_n) \subseteq S_{n-1}$. Tedaj je $(S_*, \partial_*|_{S_*})$ sam zase verižni kompleks. Če je $f_*\colon A_* \to B_*$ verižni homomorfizem, potem je *jedro* $\mathrm{Ker}f_* := (\mathrm{Ker}f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ podkompleks v A_*, *slika* $\mathrm{Im}f_* := (\mathrm{Im}f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pa je podkompleks v B_*. Zgled: vsak simplicialni podkompleks $Y \subseteq X$ inducira verižni podkompleks $\mathbb{Z}^{(Y^{[*]})} \subseteq \mathbb{Z}^{(X^{[*]})}$.

Če sta $f_*, g_*\colon A_* \to B_*$ verižna homomorfizma, potem je *homotopija* od f_* do g_* družina homomorfizmov $h_n\colon A_n \to B_{n+1}$, tako da velja $\forall n \in \mathbb{Z}\colon f_n - g_n = \partial^B_{n+1} \circ h_n + h_{n+1} \circ \partial^A_n$ $(\star)$, oz. krajse zapisano, $f - g = \partial \circ h + h \circ \partial$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial^A_{n+1}"] \arrow[dl] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A_n \arrow[r, "\partial^A_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial^B_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "\partial^B_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Verižna homomorfizma f_* in g_* sta homotopna, označeno z $f_* \simeq g_*$, ko obstaja kaka verižna homotopija od f_* do g_*. Homotopni verižni homomorfizmi inducirajo enake homomorfizme na homologiji, t.j. $f_* \simeq g_*\colon A_* \to B_* \implies H_n f = H_n g\colon H_n(A_*) \to H_n(B_*)$, za vsak $n \in \mathbb{Z}$, saj za poljuben $x \in \mathrm{Ker}\partial$ velja $H_n f(x + \mathrm{Im}\partial) = f(x) + \mathrm{Im}\partial \overset{(\star)}{=} g(x) + \partial(h(x)) + h(\cancel{\partial(x)}) + \mathrm{Im}\partial = g(x) + \mathrm{Im}\partial = H_n g(x + \mathrm{Im}\partial)$. Zgled: Običajna homotopija $h\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ med zveznima preslikavama f in g na topoloških prostorih inducira verižno homotopijo $h_*\colon \mathbb{Z}^{\mathcal{C}(\Delta^n, X)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{C}(\Delta^{n+1}, X)}$ med verižnima preslikavama f_* in g_*, ki pošlje bazni element $\sigma\colon \Delta^n \to X$ v $h_*\sigma := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i h \circ (\sigma \times \mathrm{id}_{\mathbb{I}}) \circ (x_0, \ldots, x_i, x'_i, \ldots, x'_n)$, kjer je $(x_0, \ldots, x_i, x'_i, \ldots, x'_n)$ linearna vložitev $\Delta^{n+1} \hookrightarrow \Delta^n \times \mathbb{I}$ v i-ti simpleks standardne triangulacije produkta simpleksov $\Delta^n \times \mathbb{I}$.

Verižna kompleksa A_* in B_* sta *homotopsko ekvivalentna*, ko obstajata verižni preslikavi $f_*\colon A_* \to B_*$ in $g_*\colon B_* \to A_*$, tako da velja $g_* \circ f_* \simeq \mathrm{id}^A_*$ in $f_* \circ g_* \simeq \mathrm{id}^B_*$; tedaj je f_* h*omotopska ekvivalenca*, s *homotopskim inverzom* g_*. Če je $f_*\colon A_* \to B_*$ homotopska ekvivalenca, je vsak $H_n f\colon H_n(A_*) \to H_n(B_*)$ izomorfizem, saj je $H_n g \circ H_n f = H_n(g \circ f) = H_n(\mathrm{id}^A_*) = \mathrm{id}_{H_n A_*}$ in $H_n f \circ H_n g = H_n(f \circ g) = H_n(\mathrm{id}^B_*) = \mathrm{id}_{H_n B_*}$. Obrat ne velja (verižni homomorfizem f_* inducira izomorfizme $H_n f$ za vsak n) $\not\Rightarrow$ (f_* je homotopska ekvivalenca). Protiprimer je

$$\begin{tikzcd}
A_*\colon & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
B_*\colon & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

saj za vsako verižno homotopijo $h_*\colon B_* \to B_{*+1}$ med verižnima homomorfizmoma 0 in id^B_* mora veljati $h\colon \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0\cdot} \mathbb{Z}$ in $h\colon \mathbb{Z} \xrightarrow{2k\cdot} 2\mathbb{Z}$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Zgled: homotopska ekvivalenca med topološkimi prostori inducira homotopsko ekvivalenco verižnih kompleksov, za vsak n.

Naj bo S_* podkompleks v A_*. *Retrakcija* je verižni homomorfizem $r_*\colon A_* \to A_*$, tako da velja $r_*(A_*) = S_*$ in $r_* \circ r_* = r_*$, oz. $r_*(A_*) = S_*$ in $r_*|_{S_*} = \mathrm{id}_{S_*}$. *Deformacijska retrakcija* je retrakcija $r_*\colon A_* \to S_*$, tako da obstaja homotopija $h_*\colon A_* \to A_{*+1}$, $r_* \simeq \mathrm{id}_*$. *Krepka deformacijska retrakcija* je retrakcija $r_*\colon A_* \to S_*$, tako da obstaja homotopija $h_*\colon A_* \to A_{*+1}$, $r_* \simeq \mathrm{id}_*$, za katero velja $h_*(S_*) \subseteq S_{*+1}$. Vsaka deformacijska retrakcija je homotopska ekvivalenca, katere homotopski inverz je inkluzija $\iota\colon S_* \to A_*$. Zgled: ((krepka) deformacijska) retrakcija) med topološkimi prostorom in podprostorom inducira ((krepko) deformacijsko) retrakcijo) med verižnim kompleksom in podkompleksom.

Algebraična Morsova teorija: *Baziran kompleks* je verižni kompleks (A_*, ∂_*), skupaj s predpisano dekompozicijo vsakega modula A_n v direktno vsoto podmodulov $A_n = \bigoplus_{i\in I_n} A_{n,i}$. Naj $\partial_{n,i,j} \equiv \partial_{i,j}$ označuje homomorfizem $A_{n,i} \xrightarrow{\iota} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\pi} A_{n-1,j}$, kjer je ι inkluzija in π projekcija. Vsakemu baziranemu kompleksu predpišemo njegov *pripadajoči graf*, označen z Γ_{A_*}, ki je usmerjen enostaven graf z množico vozlišč $\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ in množico usmerjenih povezav $\{(i,j); \exists n\in\mathbb{Z}\colon\ i\in I_n, j\in I_{n-1}, \partial_{n,i,j}\neq 0\}$, tj. vozlišča so indeksi modulov $A_{n,i}$, s tem da imamo povezavo od i do j natanko tedaj ko je $\partial_{i,j}$ neničelna preslikava. Povezavo (i,j) bomo označili z $i\to j$. Za poljubno podmnožico $\mathcal{M}$ množice vozlišč grafa Γ_{A_*} naj $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$ označuje graf ki ga dobimo iz Γ_{A_*} ko vsem povezavam iz $\mathcal{M}$ obrnemo smer.

Naj bo (A_*, ∂_*, I_*) baziran kompleks. *Morsovo prirejanje* na Γ_{A_*} je podmnožica $\mathcal{M}$ vozlišč grafa, tako da so izpolnjeni naslednji pogoji:

(1) $\mathcal{M}$ je *prirejanje*, t.j. povezave iz $\mathcal{M}$ nimajo skupnih krajišč;
(2) za vsako povezavo $i\to j$ v $\mathcal{M}$ je pripadajoča preslikava $\partial_{i,j}$ izomorfizem;
(3) na vsakem I_n obstaja delna urejenost $\preceq$, tako da velja:
  (i) če sta $i,k\in I_n$ in je $i\to j\to k$ pot v (spremenjenem) grafu $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$, potem je $i\succ k$;
  (ii) $\preceq$ je *Artinska*, t.j. ne obstaja neskončnih padajočih verig $i_1\succ i_2\succ i_3\succ\ldots$ v I_n.

Opazimo: Za vsako pot $i\to j\to k$ v $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$, kjer je $i,k\in I_n$, velja bodisi $j\in I_{n-1}$ in $j\to k\in\mathcal{M}$, bodisi pa $j\in I_{n+1}$ in $i\to j\in\mathcal{M}$. Za vsako pot $i_0\to i_1\to\ldots\to i_m = i_0$ v $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$ obstaja $n\in\mathbb{Z}$, tako da velja $\{i_1,\ldots,i_m\}\subseteq I_{n+1}\cup I_n$ po lastnosti (1), toda po (3.i) velja $i_0\succ i_0$, protislovje. Sklepamo, da $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$ ne vsebuje sklenjenih usmerjenih poti, tj. graf je *acikličen*. Poleg tega za vsak $x\in A_{n,i}$ velja $\partial(x)=\sum_{i\to j}\partial_{i,j}(x)$; tu vsota teče po vseh j ki so sosedni k i.

Vozlišče v $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$, ki ni krajišče nobene povezave iz $\mathcal{M}$, je $\mathcal{M}$-*kritično*; sicer je $\mathcal{M}$-regularno.

$$\text{Označimo}\quad \begin{array}{l} \mathcal{M}^0 := \{\mathcal{M}\text{-kritična vozlišča v } \Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}\},\\ \mathcal{M}^+ := \{i;\ \exists i\to j\in\mathcal{M}\},\\ \mathcal{M}^- := \{j;\ \exists i\to j\in\mathcal{M}\},\end{array}\quad \text{in}\quad \begin{array}{l}\mathcal{M}^0_n := \mathcal{M}^0\cap I_n,\\ \mathcal{M}^+_n := \mathcal{M}^+\cap I_n,\ ,\\ \mathcal{M}^-_n := \mathcal{M}^-\cap I_n,\end{array}$$

in s tem dobimo particijo $I_n = \mathcal{M}^0_n\cup\mathcal{M}^+_n\cup\mathcal{M}^-_n$ pri vsakem n.

Za dano Morsovo prirejanje $\mathcal{M}$ na Γ_{A_*} definiramo homomorfizem $\phi_*: A_*\to A_{*+1}$ preko indukcije na $\preceq$. Zadošča definirati ϕ na vsakem $A_{n,i}$ posebej. Naj bo $x\in A_{n,i}$. Če je i minimalen element v I_n glede na $\preceq$, potem naj bo $\phi(x) := \begin{cases}\partial_{j,i}^{-1}(x); & \text{če } j\to i\in\mathcal{M} \text{ za nek } j\\ 0 & ;\ \text{sicer}\end{cases}$. Ko i ni minimalen, pa definiramo

$$\phi(x) := \begin{cases}\partial_{j,i}^{-1}(x) - \sum_{j\to k\neq i}\phi\partial_{j,k}\partial_{j,i}^{-1}(x); & \text{če } j\to i\in\mathcal{M} \text{ za nek } j\\ 0 & ;\ \text{sicer.}\end{cases}$$

Torej, ko je $j\to i\in\mathcal{M}$ (tak j je enoličen, po (1)), slikamo $x\mapsto\partial_{j,i}^{-1}(x) =: y\in A_{n+1,j}$ ($\partial_{j,i}^{-1}$ je izomorfizem, po (2)), in tedaj za vsak $k\in I_n\setminus\{i\}$ ki je sosednji k j, od y odštejemo $\phi\partial_{j,k}(y)$. Ker za vsak tak k velja $i\succ k$ (po (3.i)), ima ta proces končno mnogo korakov (po (3.ii)). Tudi če ima vozlišče j neskončno stopnjo, je $\partial_{j,k}(y)$ neničelen le za končno mnogo k-jev (po definiciji $\bigoplus$), torej je vsota $\sum_{j\to k\neq i}\phi\partial_{j,k}(y)$ končna.

Definirajmo $\pi: A\to A$ kot $\pi = \mathrm{id} - \phi\partial - \partial\phi$ (stopničen homomorfizem stopnje 0). Naj bo $\mathring{A}_n := \bigoplus_{i\in\mathcal{M}^0_n} A_{n,i}$. Definirajmo $\mathring{\partial}\colon \mathring{A}\to\mathring{A}$ kot $\mathring{\partial} = p(\partial - \partial\phi\partial)$, kjer je $p_n: A_n\to\mathring{A}_n$ koordinatna projekcija. Za $i\in I_n$ in $j\in I_{n-1}\cup I_{n+1}$ označimo množico vseh usmerjenih poti v $\Gamma_{A_*}^{\mathcal{M}}$ od i do j z $\Gamma_{i,j}$. Take poti so tipa 'zig-zag', t.j. so oblike $i = i_1\to i_n\to\ldots\to i_{2k-1}\to i_{2k} = j$, kjer vsi $i_{2\cdot\_+1}$ ležijo v I_{n-1} ali I_{n+1}, in vsi $i_{2\cdot\_}$ ležijo v I_n. Za vsako tako pot $\gamma\in\Gamma_{i,j}$ definiramo ∂_γ kot homomorfizem, ki slika iz $A_{n,i}$ v $A_{n\pm1,j}$ vzdolž poti γ, t.j.

$$\partial_\gamma := \begin{cases}(-1)^{k-1}\partial_{i_{2k-1},i_{2k}}\partial^{-1}_{i_{2k-1},i_{2k-2}}\ldots\partial^{-1}_{i_5,i_4}\partial_{i_3,i_4}\partial^{-1}_{i_3,i_2}\partial_{i_1,i_2}; & \text{if } j\in I_{n-1}\\ (-1)^{k-1}\partial^{-1}_{i_{2k},i_{2k-1}}\partial_{i_{2k-2},i_{2k-1}}\ldots\partial_{i_4,i_5}\partial^{-1}_{i_4,i_3}\partial_{i_2,i_3}\partial^{-1}_{i_2,i_1}; & \text{if } j\in I_{n+1}.\end{cases}$$

Theorem (Sköldberg, Welker, Jöllenbeck - 2005):
Naj bo (A_*, ∂_*, I_*) *baziran kompleks in* $\mathcal{M}$ *Morsovo prirejanje na* Γ_{A_*}*.*

- ϕ *je* razcepna homotopija*, tj. velja* $\phi\phi = 0$ *in* $\phi\partial\phi = \phi$
- *Za vsak* $x \in A_{n,i}$ $\exists y_j, z_j \in A_{n,j}$ *velja* $\partial\phi(x) = \begin{cases} x + \sum_{j \prec i} y_j; & i \in \mathcal{M}^- \\ 0 & ; \; i \notin \mathcal{M}^- \end{cases}$ *in* $\phi\partial(x) = \begin{cases} x & ; \; i \in \mathcal{M}^+ \\ \sum_{j \prec i} z_j; & i \notin \mathcal{M}^+ \end{cases}$.
- $\pi_* : A_* \to A_*$ *je verižni homomorfizem*
- $\pi_* : A_* \to \pi(A_*)$ *je krepka deformacijska retrakcija*
- $\pi(A_n) = \pi(\mathring{A}_n)$ *za vsak* $n \in \mathbb{Z}$*.*
- $\pi(\mathring{A}_n) \xleftarrow{\pi \cong} \mathring{A}_n$ *je izomorfizem modulov za vsak* $n \in \mathbb{Z}$*.*
- $(\mathring{A}_*, \partial_*|_{\mathring{A}_*})$ *je verižni kompleks natanko tedaj ko je* $\pi|_{\mathring{A}_*} = \mathrm{id}_{\mathring{A}_*}$*.*
- $\mathring{\partial} = p\partial\pi$*.*
- $(\mathring{A}_*, \mathring{\partial}_*) =: \mathring{A}_*$ *je verižni kompleks.*
- $\pi(\mathring{A}_*) \xleftarrow{\pi = p^{-1}} \mathring{A}_*$ *je izomorfizem verižnih kompleksov.*
- *Za vsak* $\forall x \in A_{n,i}$ *velja* $\phi(x) = \sum_{j \in I_{n+1}, \gamma \in \Gamma_{i,j}} \partial_\gamma(x)$*.*
- *Za vsak* $\forall x \in A_{n,i}$ *velja* $\mathring{\partial}(x) = \sum_{j \in I_{n-1}, \gamma \in \Gamma_{i,j}} \partial_\gamma(x)$*.*
- $\phi(A_n) = \bigoplus_{i \in \mathcal{M}_n^+} A_{n,i}$*.*

Sklep: Za dan baziran kompleks (A_*, ∂_*, I_*) nam vsako Morsovo prirejanje $\mathcal{M}$ na Γ_{A_*} inducira homotopsko ekvivalenco (krepko deformacijsko retrakcijo + izomorfizem) med verižnima kompleksoma (A_*, ∂_*) in $(\mathring{A}_*, \mathring{\partial}_*)$, in zato izomorfizme

$$H_n(A_*, \partial_*) \cong H_n(\mathring{A}_*, \mathring{\partial}_*).$$

V posebnem, $\mathcal{M}^0 \subseteq I_n$ implicira

$$H_k(A_*, \partial_*) \cong \begin{cases} \mathring{A}_n; & k = n \\ 0 \;\; ; & k \neq n \end{cases}.$$

Splošneje, $\mathcal{M}^0_{n-1} = \emptyset = \mathcal{M}^0_{n+1}$ implicira

$$H_n(A_*, \partial_*) \cong \mathring{A}_n.$$

References

[1] R. Forman: *Morse Theory for Cell Complexes*, Advances in Mathematics 134, 90-145, ©1998.

[2] E. Sköldberg: *Morse Theory from an Algebraic Viewpoint*, Transactions of the AMS 358, 1, 115–129, ©2005.

[3] M. Jöllenbeck, V. Welker: *Resolution of the residue class field via algebraic discrete Morse theory*, ©2005.